228 - Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Cadre : $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

I Continuité et dérivabilité

1) Continuité

Définition 1. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in I$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in I,\ |x_0 - y| \Rightarrow |f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$$

Autrement dit, lorsque $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I. On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

Lemme 2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue en $x \in I$, et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie et continue en $f(x)$. Alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue en x.*

Proposition 3. *Si f est est continue et bijective d'un compact I dans J, alors f^{-1} est continue sur J.*

Exemple 4. *(i) $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue au aucun point.*
(ii) Les fonctions polynômiales sont continues.

Proposition 5. *$f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $x \in I$ si, et seulement si, toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x est telle que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$.*

Exemple 6. *$x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas continue en 0.*

Théorème 7. *Soit $x_0 \in I$, et soit $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe et vaut ℓ, alors la fonction :*

$$g : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{si} \quad x \in I \setminus \{x_0\} \\ \ell & \text{si} \quad x = x_0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est continue en x_0. g est un prolongement de f par continuité.

Théorème 8. *$\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.*

Définition 9. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in I,\ |x - y| \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Remarque 10. *L'uniforme continuité implique la continuité, mais la réciproque est fausse en général.*

Exemple 11. *$x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais pas uniformément.*

Théorème 12 (Heine)**.** *Toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue.*

2) Dérivabilité

Définition 13. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable à droite (resp. à gauche) en $x_0 \in I$ lorsque la limite suivante existe :

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \left(\text{resp. } \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$$

On dit que f est dérivable en x_0 si elle est dérivable à droite et à gauche et que les limites coïncident. Dans ce cas, cette limite est notée $f'(x_0)$. La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f. On dit que f est dérivable sur I si elle est continue en tout point de I. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. On note $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$.

Remarque 14. *La dérivée n'est pas forcément continue.*

Proposition 15. *Toute fonction dérivable est continue.*

Théorème 16. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a et $g : f(I) \to \mathbb{R}$ dérivable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a, et on a :*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Corollaire 17. *Si $f : I \to J$ est bijective et dérivable en a, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si, et seulement si, $f'(a) \neq 0$. Dans ce cas, on a :*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \quad \text{où} \quad b = f(a)$$

Théorème 18. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en a. Alors fg est dérivable en a, et on a :*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

Corollaire 19. *$\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.*

Définition 20. Pour $n \geqslant 1$, on pose $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}$ continue.

Remarque 21. $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \subset \ldots \subset \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^{n+1}(I, \mathbb{R}) \subset \ldots$

Théorème 22 (Leibniz)**.** *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables n fois en a. Alors fg est dérivable n fois en a, et on a :*

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(a) g^{(n-1)}(a)$$

II Résultats fondammentaux

1) Théorèmes des valeurs intermédiaires et de Rolle

Théorème 23. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(I)$ est un intervalle.*

Corollaire 24. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes différents, alors l'équation $f(x) = 0$ admet des solutions sur $[a, b]$.*

Théorème 25 (Darboux)**.** *Si $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$, alors $f'(I)$ est un intervalle.*

Proposition 26. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et dérivable en $c \in \mathring{I}$. Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$.*

Théorème 27 (Rolle)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in \mathring{I}$ tel que $f'(c) = 0$.*

Théorème 28 (Accroissements finis)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. Alors il existe $c \in \mathring{I}$ tel que $f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$.*

Corollaire 29. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathring{I}$.*

(i) f est croissante sur I si, et seulement si, f' est positive sur $\mathring{I}$.

(ii) f est constante si, et seulement si, f' est constante égale à 0.

Remarque 30. *Ces résultats sont faux si I n'est pas un intervalle : $x \mapsto -\frac{1}{x}$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$, même si sa dérivée est positive.*

2) Formule de Taylor

Théorème 31 (Taylor-Young)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}$ et f dérivable n fois en a.*

$$\forall\, x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Théorème 32 (Taylor-Lagrange)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}$ et f de classe $\mathcal{C}^n$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, et dérivable $n+1$ fois sur $]a, b[$.*

$$\exists\, c \in \mathring{I},\ f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Théorème 33 (Taylor avec reste intégral)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}$ et f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

III Étude de certaines classes de fonctions

1) Fonctions lipschitziennes

Définition 34. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne de rapport k si :

$$\exists\, k \in \mathbb{R},\ \forall\, x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$

Proposition 35. *Une fonction de dérivée bornée est lipschitzienne.*

Proposition 36. *Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.*

2) Suites de fonctions

Théorème 37. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. Si toutes les fonctions f_n sont continues en $x_0 \in I$, alors c'est aussi le cas de f.*

Théorème 38. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$. On suppose que :*

(i) Il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))_n$ converge.

(ii) $(f_n')_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g.

Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ telle que $f' = g$.

Théorème 39 (Dini)**.** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f. Alors la convergence est uniforme si $(f_n)_n$ est monotone ou si les f_n sont croissantes.*

Théorème 40 (Weierstrass)**.** *L'ensemble des polynômes sur $[a, b]$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.*

3) Intégrales à paramètre

Théorème 41. *Soit $f : \Lambda \times I \to \mathbb{K}$, avec $\Lambda \subset \mathbb{R}$ un intervalle, telle que :*

(i) Pour tout $t \in I$, $\lambda \mapsto f(\lambda, t)$ est continue sur Λ.

(ii) Pour tout $\lambda \in \Lambda$, $t \mapsto f(\lambda, t)$ est intégrable sur I.

(iii) $\exists\, g \in L^1(I, \mathbb{R}^+), \forall \lambda \in \Lambda, |f(\lambda, t)| \leqslant g(t)$ p.p.

Alors $\lambda \mapsto \int_I f(\lambda, t) dt$ est continue sur Λ.

Théorème 42. *Soit $f : \Lambda \times I \to \mathbb{K}$, avec $\Lambda \subset \mathbb{R}$ un intervalle, telle que :*

(i) Pour tout $t \in I$, $\lambda \mapsto f(\lambda, t)$ est dérivable sur Λ.

(ii) Pour tout $\lambda \in \Lambda$, $t \mapsto f(\lambda, t)$ est intégrable sur I.

(iii) $\exists\, g \in L^1(I, \mathbb{R}^+), \forall \lambda \in \Lambda, |f'(\lambda, t)| \leqslant g(t)$ p.p.

Alors $\lambda \mapsto \int_I f(\lambda, t) dt$ est dérivable sur Λ de dérivée $\lambda \mapsto \int_I f'(\lambda, t) dt$.

IV Cas des distributions, dérivée faible

1) Définitions et dérivation faible

Définition 43. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On appelle support de φ l'adhérence de $\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\}$. On pose, pour $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ouvert, $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω à support compact.

Définition 44. On dit que $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une distribution s'il s'agit d'une forme linéaire telle que, pour tout $K \subset \Omega$ compact, on a :

$$\exists\, p_K \in \mathbb{N},\ \exists\, C_K > 0,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ |\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C_K \sup_{n \leqslant p_K} \left\| \varphi^{(n)} \right\|_{\infty, K}$$

On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

Définition 45. On dit qu'une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de distributions sur Ω converge (dans $\mathcal{D}'(\Omega)$) vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si :

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$$

Proposition 46. *La convergence L^1 sur tout compact est plus forte que la convergence des distributions.*

Définition 47. Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on note T' la distribution définie par $\langle T', \varphi\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle$. On l'appelle la dérivée de T.

Proposition 48. *L'application de dérivation sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ est bien définie et est continue : si (T_n) converge vers T, alors $(T_n^{(k)})$ converge vers $T^{(k)}$.*

2) Exemples et lien avec la dérivée usuelle

Proposition 49. *Si f est $\mathcal{C}^1$, f induit $D_f \in \mathcal{D}'$ avec $D_{f'} = (D_f)'$.*

Exemple 50. *Soit $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$. Alors $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $D_{H'} = \delta_0$.*

Théorème 51 (Formule des sauts)**.** *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $]a, b[$. Soit a_i les points où f n'est pas $\mathcal{C}^1$. Alors :*

$$D_{f'} = (D_f)' + \sum_{i=1}^{N} \left(\lim_{x\to a_i^+} f(x) - \lim_{x\to a_i^-} f(x) \right) \delta_{a_i}$$

Exemple 52. *La fonction $x \mapsto \ln|x|$ admet comme dérivée au sens des distributions $vp\left(\frac{1}{x}\right)$, définie, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, par :*

$$\left\langle vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

V Méthode de Newton

La méthode de Newton consiste à approcher une solution d'une équation $f(x) = 0$ en partant d'une approximation plus grossière. L'idée est de remplacer la courbe de f par sa tangente.

Théorème 53 (Méthode de Newton)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$ et $f' > 0$ sur $[a, b]$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$x_0 \in [a, b] \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \phi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

La fonction f admet un unique zéro $\alpha \in]a, b[$, et on a :

(i) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $x_0 \in I =]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quadratiquement vers α, et il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |x_{n+1} - \alpha| \leqslant C|x_n - \alpha|^2$$

(ii) Si de plus $f'' > 0$ sur $[\alpha, b]$, alors, pour $x \in]\alpha, b]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$0 \leqslant x_{n+1} - \alpha \leqslant C(x_n - \alpha)^2 \quad \text{et} \quad x_{n+1} - \alpha \sim \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(x_n - \alpha)^2$$

Développements

- Théorème de Weierstrass (40) [Gou08]
- Méthode de Newton (53) [Rou15]

Références

[Gou08] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses
[Pom97] A. Pommelet. *Cours d'Analyse.* Ellipses
[FGN13a] S. Francinou, H. Gianella, et S. Nicolas. *Oraux X-ENS Algèbre 1.* Cassini
[Rou15] F. Rouvière. *Petit Guide de Calcul Différentiel.* Cassini